## الإحداثيات القطبية:

لتكن $M(x,y)$ نقطة تتحرك في المستوي الديكارتي
$xoy$ ، و $\vec{R}(t)$ متجه موضعها

$\vec{R}(t)$

[1] $\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$

الأن سنكتب متجه الموضع $\vec{R}(t)$ بدلالة الإحداثيات
القطبية $(r,\theta)$

حيث $r = \sqrt{x^2+y^2}$

و $\theta = \arctan \frac{y}{x}$

نسمي العدد $r$ نصف قطر المتجه القطبي = الزاوية $\theta$ الزاوية القطبية.
ونعلم أن علاقة الإحداثيات القطبية ونعلم أن علاقة الإحداثيات الديكارتية
بدلالة القطبية

$x = r.\cos\theta$

$y = r.\sin\theta$

عندئذٍ:

[2] $\vec{R}(t) = r(t)\,(\cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j})$

نلاحظ أن المتجه [3] $\vec{I}(\theta(t)) = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j}$
هو متجه واحدة له منحى $\vec{R}(t)$

عندئذٍ نكتب (2) بالشكل:

[4] $\vec{R}(t) = r(t)\,.\,\vec{I}(\theta(t))$

حيث $t$ وسيط غالباً ما يكون الوسيط الزمني.

باشتقاق العلاقة [3] بالنسبة للزمن $t$

نجد:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\,\theta'\,\vec{i} + \cos\theta\,.\theta'\,\vec{j})$$

نسمي المتجه:

$$(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,.\vec{j})$$

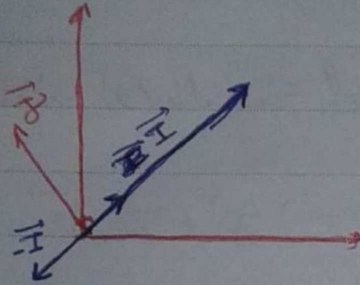
والذي يمثل متجه الواحدة (كون طويلته تساوي الواحد)، نشتق متجه الواحدة $\vec{I}$ بالنسبة لـ $\theta$
ونرمز له بـ $\vec{J}$.

(5) $\frac{d\vec{I}}{d\theta} = \vec{J} = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$

وهو يعامد المتجه I (نتيجة سابقة)

باشتقاق (5) بالنسبة لـ θ نجد:

(6) $\frac{d\vec{J}}{d\theta} = -(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = -\vec{I}$



نعني أن الاشتقاق للمتجهات الواحدة

$\vec{I}$ و $\vec{J}$ يمثل دوران بعكس عقارب الساعة

بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

لنجد متجه السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية.

نشتق طرفي العلاقة (4) بالنسبة للزمن t نجد:

$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{R}(t) = r'\vec{I} + r\left[\frac{d\vec{I}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]$

(7) $\boxed{\vec{v}(t) = r'\vec{I} + r\theta'\vec{J}}$

لإيجاد التسارع نشتق العلاقة (7) بالنسبة لـ t نجد:

$\vec{a}(t) = r''\vec{I} + r'\theta'\vec{J} + r'\theta'\vec{J} + r\theta''\vec{J} - r\theta'^2\vec{I}$

(8) $\boxed{\vec{a}(t) = (r'' - r\theta'^2)\vec{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{J}}$

نشتق التسارع بالنسبة لـ t.

---

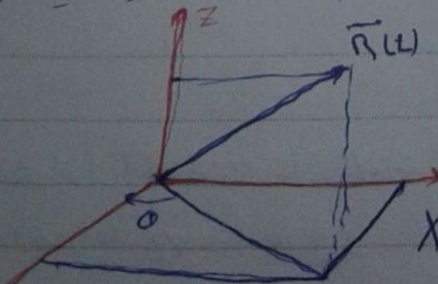
الاحداثيات الاسطوانية:

نعلم أن علاقة الاحداثيات الاسطوانية (r,θ,Z) بالاحداثيات الديكارتية هي:

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$

$Z = Z$



حيث (r,θ) الاحداثيات القطبية في المستوي XOY.

وبالتالي متجه الموضع في الاحداثيات الاسطوانية يأخذ الشكل :

$$\vec{R}(t) = r(t).(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + Z\vec{k}$$

$$(9) \quad \vec{R}(t) = r(t)\,\vec{I}(\theta(t)) + Z\vec{k}$$

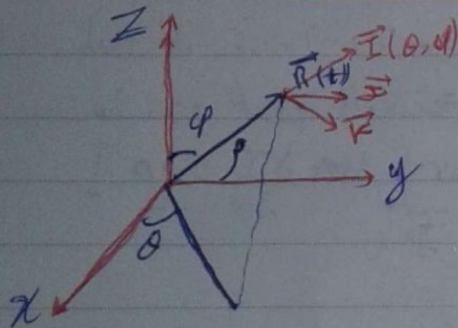
حيث $\vec{I}(\theta(t))$ متجه واحدة يسامد المتجه $\vec{R}(t)$ وموجهاً باتجاه تزايد الزاوية $\theta$.

- باشتقاق (9) بالنسبة للزمن $t$ نحصل على متجه السرعة في الاحداثيات الاسطوانية

$$(10) \quad \vec{v}(t) = r'\vec{I} + r\theta'\vec{I} + Z'\vec{k}$$

$$(11) \quad \vec{a}(t) = (r'' - r\theta'^2)\vec{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{J} + Z''\vec{k}$$

## الإحداثيات الكروية :




بفرض $(\rho, \theta, \varphi)$ الاحداثيات الكروية لنقطة متجه في الفضاء الثلاثي $OXYZ$

حيث :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Z}$$

و $0 < \rho$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ | $0 \le \varphi \le \pi$

ونعلم أن :

$$(12) \quad \begin{cases} x = \rho.\cos\theta.\sin\varphi \\ y = \rho.\sin\theta.\sin\varphi \\ Z = \rho.\cos\varphi \end{cases}$$

استناداً إلى (12) فإن المتجه الموضع في الاحداثيات الكروية تكتب :

$$\vec{R}(t) = \rho(t)(\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k})$$

SUBJECT:

.نلاحظ أن   (13) $\vec{R}(t) = \rho(t)\,\vec{I}(\theta(t), \varphi(t))$

.حيث :

(14) $\vec{I} = (\cos\theta . \sin\varphi \vec{i} + \sin\theta . \sin\varphi \vec{j} + \cos\varphi \vec{k})$

.وهو متجه واحدة لمنحنى $\vec{R}(t)$

.نجد $\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta}$ ; $\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta}$ و من (14) :

(15) $\vec{K} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial \varphi} = (\cos\theta . \cos\varphi . \vec{i} + \sin\theta . \cos\varphi \vec{j} - \sin\varphi \vec{k})$

.نلاحظ أن $\frac{\partial \vec{I}}{\partial \varphi}$ متجه واحدة نرمز له ب $\vec{K}$

وهو عمودي على $\vec{I}$ وموجهاً باتجاه تزايد الزاوية $\varphi$

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta} = (-\sin\theta . \sin\varphi \vec{i} + \cos\theta . \sin\varphi \vec{j} + 0\vec{k})$$

.نلاحظ أن $\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta}$ ليس متجه واحدة ولإيجاد متجه الواحده الموازي له نُقسم على طويلته

.ونرمز لمتجه الواحدة الناتج ب $\vec{J}$.

$$\vec{J} = \frac{\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta}\right|} = \frac{(-\sin\theta . \sin\varphi \vec{i} + \cos\theta . \sin\varphi . \vec{j})}{|\sin\varphi|}$$

(16) $\boxed{\vec{J} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\ \vec{j}}$

وهو يعامد المتجهين $\vec{K}, \vec{I}$

والمتجهات $\vec{I}$ و $\vec{J}$ , $\vec{K}$ تشكل ثلاثية مرتبة .

.لنجد $\frac{\partial \vec{K}}{\partial \varphi}$ , $\frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta}$ , $\frac{\partial \vec{J}}{\partial \varphi}$ ; $\frac{\partial \vec{J}}{\partial \theta}$

$$\vec{K} = (\cos\theta . \cos\varphi \vec{i} . \sin\theta . \cos\varphi . \vec{j} - \sin\varphi \vec{k})$$

(17) $-\vec{I} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial \varphi} = -(\cos\theta . \sin\varphi \vec{i} + \sin\theta . \sin\varphi . \vec{j} + \cos\varphi)$

(18) $(\vec{J} . \cos\varphi) = \frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta} = (-\sin\theta . \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta . \cos\varphi \vec{j})$

(19) $$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0$$

(20) $$\frac{\partial I}{\partial \theta} = -(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{J})$$

نلاحظ أن $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ يكتب بدلالة $\vec{I}$ و $\vec{K}$ على النحو:

(21) $$\frac{\partial \vec{J}}{\partial \theta} = -(\sin\varphi . \vec{I} + \cos\varphi . \vec{K})$$

(22) $$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta} = \sin\varphi . \vec{J}$$

نوجز ماسبق بما يلي:

حفظ

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \varphi} = \vec{K} , \frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta} = \sin\varphi \vec{J}$$

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial \varphi} = -\vec{I} , \frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta} = \cos\varphi \vec{J}$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial \theta} = -(\sin\varphi \vec{I} + \cos\varphi \vec{K})$$

---

بالنهاية لنعد متجه السرعة والتسارع نحو الاحداثيات الكروية:

(23) $$\vec{R}(t) = \rho(t) . \vec{I}(\theta(t), \varphi(t))$$

باشتقاق (23) طرفاً لطرف بالنسبة لـ $t$ مع مراعاة القواعد السابقة نجد:

$$\vec{v}(t) = \rho' I + \rho [\frac{\partial I}{\partial \varphi} . \varphi' + \frac{\partial I}{\partial \theta} . \theta']$$

$$= \rho' \vec{I} + \rho [\varphi' \vec{K} + \varphi' . \sin\varphi . \vec{J}]$$

(24) $$\vec{v}(t) = \rho' \vec{I} + \rho \varphi' \vec{K} + \rho . \theta' . \sin\varphi \vec{J}$$

باشتقاق (24) بالنسبة لـ $t$ نجد:

$$\vec{a}(t) = \rho''\vec{I} + \rho'[\varphi'\vec{K} + \theta'\sin\varphi\,\vec{J}] + \rho'\varphi'\vec{K} + \rho\varphi''\vec{K}$$
$$+ \rho\varphi'[\frac{d\vec{K}}{d\varphi}.\varphi' + \frac{d\vec{K}}{d\theta}.\theta'] + \rho'.\theta'\sin\varphi.\vec{J} + \rho.\theta''\sin\varphi\vec{J}$$
$$+ \rho.\theta'.\varphi'.\cos\varphi.\vec{J} + \rho.\theta'.\sin\varphi[\frac{d\vec{I}}{d\varphi}.\varphi' + \frac{d\vec{I}}{d\theta}.\theta']$$

بالتعويض من العلاقات السابقة والاختصار نجد :

$$a(t) = (\rho'' - \rho.\varphi' - \rho(\theta')^2.\sin^2\varphi)\vec{I}$$
$$+ (2\rho'.\varphi' + \rho.\varphi'^2 - \rho.\theta'^2.\sin\varphi.\cos\varphi)\vec{K}$$
$$+ (2.\rho'.\theta'.\sin\varphi + \rho.\theta'^2.\sin\varphi + 2.\rho.\theta'.\cos\varphi)\vec{J}$$

---

## الحقول السلمية والحقول المتجهة :

**تعريف الحقل السلمي:** ليكن D نطاقاً مفتوحاً من الفضاء $R^2$ ، نطاق [مجموعة مفتوحة ومترابطة].

الآن إذا قابلنا كل نقطة من المجموعة D بعدد f نكون قد عرفنا حقل سلمي يرمز له بالثنائية $(D, f(D))$ أو اختصاراً f .

$$f: D \longrightarrow R$$
$$\rho \in D \longrightarrow f(D)$$

**مثال:** إذا قابلنا كل نقطة من نطاق المدرج (t) بدرجة حرارتها نحصل على حقل حراري .

- " " " " " " الغلاف الجوي بمتجه السرعة فيها نحصل على مجموعة متجهات في الغلاف الجوي يرمز له بـ $\vec{F}$ . ويوجد أمثلة عديدة على الحقول المتجهة.

**مثل:** حقل الجاذبية الأرضية والحقول المغناطيسية وغيرها .

نكتب عادة الحقول السلمية بالشكل كدالة تابعة لـ $x, y, Z$

$$\boxed{f(x, y, Z) = 2xy + Z^2}$$

والحقول المتجهة بالشكل:

$$F(x, y, Z) = P(x, y, Z)\vec{i} + Q(x, y, Z)\vec{j} + R(x, y, Z)\vec{k}$$

حيث P.Q.R دوال سلمية تابعة لـ $x, y, Z$ .

**ملاحظة :** إن العمليات على الحقول السلمية والمتجهة تشبه العمليات على الدوال الحقيقية والدوال المتجهة.